

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC MỎ-ĐỊA CHẤT

BÁO CÁO HỌC THUẬT

ỨNG DỤNG CỦA GIẢI TÍCH MALLIAVIN TRONG ƯỚC
LƯỢNG XÁC SUẤT ĐUÔI CỦA BIẾN NGẪU NHIÊN

ThS Nguyễn Thu Hằng

Hà nội, tháng 6 năm 2024

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC MỎ-ĐỊA CHẤT

BÁO CÁO HỌC THUẬT

**ỨNG DỤNG CỦA GIẢI TÍCH MALLIAVIN TRONG ƯỚC
LƯỢNG XÁC SUẤT ĐUÔI CỦA BIẾN NGẪU NHIÊN**

Xác nhận của bộ môn

Hà nội, tháng 6 năm 2024

MỤC LỤC

Lời giới thiệu	1
1. Một số kiến thức cơ bản về giải tích Malliavin	3
2. Ước lượng xác suất đuôi của biến ngẫu nhiên khả vi Malliavin	7
3. Ứng dụng	7

LỜI GIỚI THIỆU

Giải tích Malliavin lần đầu tiên được Paul Malliavin giới thiệu vào những năm 1970, là những tính toán về biến phân ngẫu nhiên vô hạn chiều trên không gian Wiener, nhằm mục đích đưa ra chứng minh cho định lý của Hörmander cho sự tồn tại của hàm mật độ trơn đối với nghiệm của phương trình vi phân ngẫu nhiên. Sau đó, phương pháp tính toán này tiếp tục được nghiên cứu, mở rộng bởi nhiều nhà toán học như Malliavin, Shigekawa, Bismut, Ikeda Watanabe, David Nualart....Phương pháp tính toán Malliavin cũng được mở rộng cho các quá trình nhảy, quá trình Markov, quá trình phân thứ....với nhiều ứng dụng trong nhiều lĩnh vực như tài chính, y học...

Như chúng ta đã biết, có rất nhiều khó khăn trong việc tìm chính xác phân phối xác suất của nghiệm X_t trong rất nhiều phương trình vi phân ngẫu nhiên. Vì vậy, bài toán ước lượng và đánh giá nghiệm là bài toán quan trọng. Trong những năm gần đây, ứng dụng của giải tích Malliavin để ước lượng hàm mật độ và ước lượng xác suất đuôi của biến ngẫu nhiên đã và đang được nhiều nhà toán học trong và ngoài nước quan tâm, chẳng hạn như ước lượng hàm mật độ [1,2,3] và ước lượng xác suất đuôi [4,5]. Cùng với luồng nghiên cứu đó, báo cáo của tôi trình bày lại một trong những ứng dụng của đạo hàm Malliavin trong ước lượng phân phối xác suất đuôi $P(X_t \geq x)$, trong đó X_t là nghiệm khả vi Malliavin của phương trình vi phân ngẫu nhiên cơ bản

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, x_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s, \quad (1)$$

trong đó, các hàm $b(t, x), \sigma(t, x) : [0, t] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn một số điều kiện nhất định.

Báo cáo học thuật chia làm ba phần

Phần 1: Trình bày một số kiến thức cơ bản về giải tích Malliavin.

Phần 2: Trình bày về phương pháp ước xác suất đuôi của biến ngẫu nhiên sử dụng giải tích Malliavin.

Phần 3. Trình bày ứng dụng trong ước lượng xác suất đuôi của biến ngẫu nhiên có dạng như trong mô hình (1).

1. Một số kiến thức cơ bản về giải tích Malliavin

Giả sử $(W_t)_{t \in [0, T]}$ là chuyển động Brown xác định trên không gian xác suất đầy đủ $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$, trong đó $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$ là bộ lọc tự nhiên của quá trình W . Cho $h \in L^2[0, T]$, ta kí hiệu $W(h)$ là tích phân Wiener

$$W(h) = \int_0^T h(t) dW_t.$$

Hàm thực $g : [0, T]^n \rightarrow \mathbb{R}$ gọi là hàm đối xứng nếu

$$g(t_{\sigma_1}, \dots, t_{\sigma_n}) = g(t_1, \dots, t_n),$$

với mọi song ánh σ từ tập $1, 2, \dots, n$ vào chính nó. Gọi $\tilde{L}^2([0, T]^n) \subset L^2[0, T]^n$ là không gian các hàm Borel bình phương khả tích và đối xứng trên $[0, T]^n$. Xét tập hợp sau

$$S_n = \{(t_1, \dots, t_n) \in [0, T]^n : 0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n\}.$$

Vì S_n có diện tích bằng $\frac{1}{n!}$ diện tích của hình hộp $[0, T]^n$ nên

$$\|g\|_{L^2([0, T]^n)}^2 = n! \int_{S_n} g^2(t_1, \dots, t_n) dt_1 \dots dt_n = n! \|g\|_{L^2(S_n)}^2.$$

Nếu f là hàm thực trên $[0, T]^n$, thì đối xứng hóa của nó xác định bởi

$$\tilde{f}(t_1, \dots, t_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma} f(t_{\sigma_1}, \dots, t_{\sigma_n}),$$

trong đó, tổng được lấy trên tất cả các hoán vị của $(1, 2, \dots, n)$.

Giả sử f là một hàm bất định trên S_n thỏa mãn $\|g\|_{L^2(S_n)}^2 < \infty$. Khi đó, ta định nghĩa tích phân

Itô lặp n lần như sau

$$J_n(f) = \int_0^T \int_0^{t_n} \dots \int_0^{t_2} f(t_1, \dots, t_n) dW(t_1) \dots dW(t_{n-1}) dW(t_n)$$

Chú ý rằng với mỗi $i = 1, \dots, n$ tích phân Itô theo $dW(t_i)$ luôn tồn tại vì hàm lấy tích phân

$\int_0^{t_i} \cdots \int_0^{t_2} f(t_1, \dots, t_n) dW(t_1) \cdots dW(t_{i-1}), t_i \in [0, -t_{i+1}]$ là một quá trình ngẫu nhiên \mathbb{F} – tương thích

và bình phương khả tích tương ứng với $d\mathbb{P} \times dt_i$.

Cho $g \in \tilde{L}^2([0, T]^n)$. Định nghĩa tích phân Itô lặp n lần trên $[0, T]^n$ như sau

$$I_n(g) := \int_{[0, T]^n} g(t_1, \dots, t_n) dW_{t_1} \dots dW_{t_{n-1}} dW_{t_n} := n! J_n(g).$$

Định lí 1.1. Cho ξ là một biến ngẫu nhiên \mathcal{F}_T -đo được trong $L^2(P)$. Khi đó tồn tại duy nhất một dãy các hàm $\{f_n\}_{n \geq 0}$ trong $\tilde{L}^2([0, T]^n)$ sao cho

$$\xi = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n),$$

trong đó, sự hội tụ xét trong $L^2(P)$. Hơn nữa, ta có đẳng cự sau

$$\|\xi\|_{L^2(P)}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n! \|f_n\|_{L^2([0, T]^n)}^2.$$

Biểu diễn

$$\xi = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n)$$

được gọi là khai triển nhiễu loạn Wiener-Itô của ξ .

Ví dụ 1.1. Tìm khai triển Wiener-Itô của $\xi = W^2(t)$.

Lời giải.

Theo công thức Itô ta có

$$\int_0^t W(t_1) dW(t_1) = \frac{1}{2} W(t)^2 - \frac{1}{2} t.$$

Suy ra

$$2 \int_0^t \int_0^{t_2} 1 dW(t_1) dW(t_2) = W^2(t) - t.$$

Do đó, khai triển Wiener-Itô của ξ là

$$W^2(t) = T + I_2(1).$$

Cho $F \in L^2(P)$ là \mathcal{F}_T - đo được với khai triển nhiễu loạn Wiener-Itô

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n), \quad f_n \in \tilde{L}^2([0; T]^n), \quad n = 1, 2, \dots$$

i. Ta nói rằng $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ nếu

$$\|F\|_{\mathbb{D}^{1,2}}^2 := \sum_{n=0}^{\infty} n n! \|f_n\|_{L^2([0, T]^n)}^2 < \infty. \quad (2)$$

ii. Nếu $F \in \mathbb{D}^{1,2}$, ta định nghĩa đạo hàm Malliavin $D_t F$ của F tại thời điểm t như sau

$$D_t F = \sum_{n=1}^{\infty} n I_{n-1}(f_n(\cdot, t)), t \in [0, T]$$

trong đó, $I_{n-1}(f_n(\cdot, t))$ là tích phân lặp bội $n-1$ của $f_n(t_1, \dots, t_{n-1}, t)$ tương ứng với $n-1$ biến đầu tiên t_1, \dots, t_{n-1} và $t_n = t$ như là một tham số.

Chú ý rằng nếu (2) đúng thì

$$\begin{aligned} \|D.F\|_{L^2(\mathbb{P} \times \lambda)}^2 &:= E \left[\int_0^T (D_t F)^2 dt \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T n^2 (n-1)! \|f_n(\cdot, t)\|_{L^2([0, T]^n)}^2 dt \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot n! \|f_n(\cdot, t)\|_{L^2([0, T]^n)}^2 = \|F\|_{\mathbb{D}^{1,2}}^2 < \infty. \end{aligned}$$

Do đó, $D.F = D_t F, t \in [0; T]$ được định nghĩa tốt như là phần tử trong $L^2(\mathbb{P} \times \lambda)$. Biến ngẫu nhiên F được gọi là khả vi Malliavin nếu nó thuộc lớp $\mathbb{D}^{1,2}$.

Ví dụ 1.2.

1. $\xi = W^2(t)$ có khai triển Wiener-Itô là $T + I_2(1)$ nên $D_t \xi = 2I_1(1) = 2W(t)$.
2. $\xi = \int_0^T g(s) dW(s)$, trong đó $g \in L^2([0, T])$ có khai triển Wiener-Itô là $\xi = I_1(g)$ nên $D_t \xi = g(s)$.

Tính đóng của đạo hàm Malliavin được thể hiện ở định lí sau đây

Định lí 1.2. Giả sử $F \in L^2(\mathbb{P})$ và $F_k \in \mathbb{D}^{1,2}$, $k = 1, 2, \dots$ sao cho:

1. $F_k \rightarrow F, k \rightarrow \infty$ trong $L^2(\mathbb{P})$.
2. $\{D_t F_k\}_{k=1}^\infty$ hội tụ trong $L^2(\mathbb{P} \times \lambda)$.

Khi đó, $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ và $D_t F_k \rightarrow D_t F$ khi $k \rightarrow \infty$ trong $L^2(\mathbb{P} \times \lambda)$.

Như vậy, nếu gọi \mathcal{S} là tập con trù mật của $L^2(P)$ bao gồm những biến ngẫu nhiên có dạng

$$F = f(W(h_1), W(h_2), \dots, W(h_n)),$$

trong đó $n \in \mathbb{N}, f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), h_1, h_2, \dots, h_n \in L^2[0, T]$ thì đạo hàm Malliavin của F là quá trình $DF := D_t F, t \in [0, T]$ cho bởi

$$D_t F = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(W(h_1), W(h_2), \dots, W(h_n)) h_k(t).$$

Ví dụ 1.3. Tính đạo hàm Malliavin của $F = \int_0^T h(t) dW_t$, trong đó $h \in L^2_{[0, T]}$.

Lời giải.

Đặt $W(h) = \int_0^T h(t) dW_t$ và xét hàm $f(x) \equiv x$. Khi đó, $F = f(W(h))$.

Suy ra

$$D_t F = f'(W(h)) h(t) = h(t).$$

Kí hiệu $\mathbb{D}_0^{1,2}$ là tập tất cả các biến ngẫu nhiên $F \in L^2(P)$ mà khai triển Wiener-Itô của nó chỉ có hữu hạn phần tử. Để tính toán đạo hàm Malliavin thuận lợi hơn, chúng tôi quan tâm đến một số quy tắc cơ bản sau đây

Định lí 1.3. (Quy tắc tích)

Giả sử $F_1, F_2 \in \mathbb{D}_0^{1,2}$. Khi đó, $F_1, F_2 \in \mathbb{D}^{1,2}$ và $F_1 F_2 \in \mathbb{D}^{1,2}$ với

$$D_t(F_1 F_2) = F_1 D_t F_2 + F_2 D_t F_1.$$

Định lí 1.4. (Quy tắc xích)

Cho $G \in \mathbb{D}^{1,2}$ và $g \in C^1(\mathbb{R})$ với đạo hàm bị chặn. Khi đó $g(G) \in \mathbb{D}^{1,2}$ và

$$D_t g(G) = g'(G) D_t G.$$

Phần chứng minh chi tiết của các định lí nêu trên, có thể tham khảo trong [7].

2. Ước lượng xác suất đuôi của biến ngẫu nhiên khả vi Malliavin

Để ước lượng xác suất đuôi của biến ngẫu nhiên, chúng tôi sử dụng phương pháp được nêu trong hai định lí sau đây

Định lí 2.1. Cho Z là biến ngẫu nhiên thuộc $\mathbb{D}^{1,2}$. Giả sử tồn tại hằng số M thỏa mãn

$$\int_0^T (D_r Z)^2 dr \leq M^2 \quad h.k.n.$$

Khi đó, ta có ước lượng xác suất đuôi sau

$$P(|Z| \geq x) \leq 2e^{\frac{-x^2}{2M^2}}, \quad x > 0.$$

Định lí 2.2. Cho $Z \in \mathbb{D}^{1,2}$ thỏa mãn $EZ = 0$. Giả sử rằng tồn tại hằng số M thỏa mãn

$$\int_0^T E[D_r F | \mathcal{F}_r]^2 dr \leq M^2 \quad h.k.n.$$

Khi đó, ta có ước lượng

$$P(F \geq x) \leq e^{\frac{-x^2}{2M^2}}, \quad x > 0.$$

Phần chứng minh của các Định lí 2.1 và Định lí 2.2 có thể xem trong [4].

3. Ứng dụng

Tiếp theo, chúng tôi sử dụng phương pháp nêu trong mục 2 để ước lượng xác suất đuôi cho nghiệm của mô hình (1). Ở đây, chúng tôi cần giả thiết (A_1) cho các hệ số như sau để phương trình tồn tại duy nhất nghiệm.

(A_1). Các hệ số b, σ thỏa mãn các điều kiện Lipschitz và tăng trưởng tuyến tính. Tức là, tồn tại các số $M, L > 0$ sao cho

$$|b(t, x) + \sigma(t, x)| \leq M |x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, T],$$

và

$$|b(t, x)|^2 + |\sigma(t, x)|^2 \leq L(1 + |x|^2), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, T].$$

Khi đó, theo Định lí 2.2.1 trong [6], phương trình (1) tồn tại duy nhất nghiệm X_t khả vi Malliavin. Hơn nữa

$$D_r X_t = \sigma(r, X_r) + \int_r^t b'(s, X_s) D_r X_s ds + \int_r^t \sigma'(s, X_s) D_r X_s dW_s, \quad (3)$$

trong đó, kí hiệu $b'(t, x) = \frac{\partial b(t, x)}{\partial x}$ và $\sigma'(t, x) = \frac{\partial \sigma(t, x)}{\partial x}$.

Ta có ước lượng xác suất đuôi sau đây

Định lí 3.1. Giả sử X_t là nghiệm của phương trình (1). Giả sử thêm $\sigma(t, x)$ thỏa mãn

$\|\sigma\|_\infty := \sup_{(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}} |\sigma(t, x)| < \infty$ cùng với các đạo hàm riêng $b'(t, x), \sigma'(t, x)$ bị chặn với mọi

$x \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, T]$. Khi đó, ta có ước lượng xác suất đuôi

$$P(X_t \geq x) = P(X_t - E[X_t] \geq x - E[X_t]) \leq \exp \left\{ -\frac{(x - E[X_t])^2}{2Cte^{Ct}} \right\}, \quad \forall x > E[X_t].$$

Chứng minh.

Từ tính chất đẳng cự Ito, ta có

$$E \left(\left(\int_r^t \sigma'(s, X_s) D_r X_s dW_s \right)^2 \middle| \mathcal{F}_r \right) = \int_r^t E \left(|\sigma'(s, X_s) D_r X_s|^2 \middle| \mathcal{F}_r \right) ds,$$

Theo bất đẳng thức Cauchy, suy ra

$$E \left(|D_r X_t|^2 \middle| \mathcal{F}_r \right) \leq 3 \left(\|\sigma\|_\infty^2 + E \left(\left(\int_r^t b'(s, X_s) D_r X_s ds \right)^2 \middle| \mathcal{F}_r \right) + \int_r^t E \left(|\sigma'(s, X_s) D_r X_s|^2 \middle| \mathcal{F}_r \right) ds \right).$$

Vì tính bị chặn của b' và σ' nên

$$\begin{aligned} E\left(|D_r X_t|^2 \middle| \mathcal{F}_r\right) &\leq 3\|\sigma\|_\infty^2 + C \int_r^t E\left(|D_r X_s|^2 \middle| \mathcal{F}_r\right) ds + C \int_r^t E\left(|D_r X_s|^2 \middle| \mathcal{F}_r\right) ds \\ &\leq 3\|\sigma\|_\infty^2 + C \int_r^t E\left(|D_r X_s|^2 \middle| \mathcal{F}_r\right) ds, \quad 0 \leq r \leq t. \end{aligned}$$

Chú ý rằng hằng số C ở các vị trí khác nhau có thể khác nhau. Ở đây, để đơn giản, chúng tôi dùng chung một kí hiệu, nó đại diện cho một hằng số xác định, bị chặn.

Từ bổ đề Gronwall ta được

$$E\left(|D_r X_t|^2 \middle| \mathcal{F}_r\right) \leq 3\|\sigma\|_\infty^2 e^{C(t-r)} \leq Ce^t, \quad 0 \leq r \leq t.$$

Từ đó suy ra,

$$\int_0^T E\left(|D_r X_t|^2 \middle| \mathcal{F}_r\right) dr = \int_0^t E\left(|D_r X_t|^2 \middle| \mathcal{F}_r\right) dr \leq Cte^t, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Đặt $Y_t = X_t - E[X_t]$ ta được $E[Y_t] = 0$ và $D_r Y_t = D_r X_t$. Do đó

$$\int_0^T E[D_r Y_t | \mathcal{F}_r]^2 \leq Cte^{Ct}.$$

Áp dụng Định lí 2.2 ta được

$$\begin{aligned} P(X_t \geq x) &= P(X_t - E[X_t] \geq x - E[X_t]) = P(Y_t \geq x - E[X_t]) \\ &\leq \exp\left\{-\frac{(x - E[X_t])^2}{2Cte^{Ct}}\right\}, \quad \forall x > E[X_t]. \end{aligned}$$

Ta có điều phải chứng minh.

KẾT LUẬN

Báo cáo đã trình bày lại một số kiến thức cơ bản về giải tích Malliavin cùng ứng dụng của giải tích Malliavin trong ước lượng xác suất đuôi của biến ngẫu nhiên. Phương pháp ước lượng này đã và đang được các nhà toán học sử dụng, nghiên cứu cho nhiều mô hình khác nhau với nhiều bài toán mở.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. N. T. Dung, N. T. Hang, P. T. P. Thuy, Density estimates for the exponential functionals of fractional Brownian motion. *Comptes Rendus Mathematique*, 2021.
2. N. T. Dung, T. C. Son, T. M. Cuong, N. V. Tan, T. N. Quynh, Density estimates for solutions of stochastic functional differential equations, *Acta Mathematica Scientia*, 2019, 39B(4): 955-970.
3. S. De Marco, Smoothness and asymptotic estimates of densities for SDEs with locally smooth coefficients and applications to square root-type diffusions. *Ann. Appl. Probab.* 21 (2011), no. 4, 1282-1321.
4. N.T. Dung, Tail estimates for exponential functionals and applications to SDEs. *Stochastic Process. Appl.* 128 (2018), no. 12, 4154--4170.
5. N.T. Dung, T. C. Son, Tail distribution estimates for one-dimensional diffusion processes. *J. Math. Anal. Appl.* 479 (2019), no. 2, 2119--2138.
6. D. Nualart, *The Malliavin calculus and related topics*. Probability and its Applications. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2006.
7. Giulia Di Nunno, Bernt Øksendal, Frank Proske, *Malliavin Calculus for Lévy Processes with Applications to Finance*, Springer, 2009.